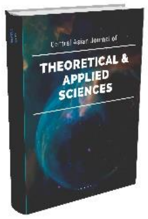

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES

Volume: 02 Issue: 05 | May 2021 **ISSN:** 2660-5317

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Муминов Ф.М
Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета
mfarhod007@gmail.com
Душатов Н.Т
Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета
n_dushatov@rambler.ru

Received 19thMay 2021, Accepted 25th May 2021, Online 31thMay 2021

Аннотация. *В настоящее время теория нелокальных задач представляет собой интенсивно развивающейся раздел дифференциальных уравнений. В этом статье предлагается постановка нелокальной задачи для смешанного уравнения и доказывается, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения поставленные задачи разрешимы в пространстве Соболева* $W_2^{'}(D)$.
Ключевые слова: *Локаль, нелокаль, нелокальная задача, негативная пространства, сопряженная уравнения.*

Введение

Теория уравнений смешанного типа является в настоящий момент одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 20-30 годы работами Ф.Трикоми, С.Геллерстета, где были впервые поставлены и исследованы краевых задачи для модельных уравнений

$$y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \qquad (1)$$

т.е. для уравнений, которые в одной части области определения эллиптического типа, а в другой части гиперболического типа. Эти задачи в настоящее время носят названия задач Трикоми и Геллерстета [1-5].

Новым толчком в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа послужили исследования А.М.Кельдыша, М.А.Лаврентьева, С.А.Христиановича, И.Н.Векуа, А.В.Бицадзе, В.Н.Врагова и др., в которых было указано на важность исследования уравнений смешанного типа для задач околозвуковой газовой динамика, бесконечно малых изгибаний поверхностей, магнитогидродинамика и других разделов механики и физики.

Отметим, что в вышеупомянутых работах, краевых условия носят локальный характер. В настоящее время теория нелокальных задач представляет собой интенсивно развивающейся раздел дифференциальных уравнений [5],[6],[7],[8].

В работах Ф.М.Франкеля в связи с исследованием ударной волны были поставлена новая нелокальная задача для уравнений смешанного типа, существенно отличающаяся от задач Трикоми и Геллерстеда, которая сейчас называется задачей Франкеля. Это задача было исследована в работах [9],[10].

В этом статье предлагается постановка нелокальной задачи для смешанного уравнения и доказывается, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения поставленные задачи разрешимы в пространстве Соболева $W_2^{'}(D)$.

Постановка задача 1. Рассмотрим уравнение

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}+f_1(x,y)u_y=f_1(x,y) \;\; при \;\; y\geq 0, \\ yu_{yy}+u_{xx}+f_2(x,y)u_y=f_2(x,y) \;\; при \;\; y<0. \end{cases} \tag{2}$$

Это уравнение параболического типа при $y\geq 0$ и гиперболического типа при $y<0$. Характеристики уравнения (2) ветви семейства парабол $x-2\sqrt{-y}=const,\ x+2\sqrt{-y}=const$ имеют огибающую ось $y=0$ параболического вырождения уравнения (2).

Таким образом, линия параболического вырождения уравнения (2) является одновременно его характеристикой. Обозначим через D конечную область, ограниченную прямоугольником ABB_1A_1, с вершинами $A(0,0),\ B(1,0),\ B_1(1,1),\ A_1(0,1)$ лежащей в полуплоскости и характеристиками $AC: x-2\sqrt{-y}=0$ и $BC: x+2\sqrt{-y}=1$ уравнения (2). Часть области D удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=u(1,y)=0 \tag{3}$$

$$u(x,1)=\beta(x)u(x,y)/AC\cup BC \tag{4}$$

$n=(n_1,n_2)-$единичный вектор внутренней нормали к ∂D. Всюду ниже предполагается, что

$$f_i(x,y)\in C^2(D),\ i=1,2$$

$$\beta(x)=\begin{cases} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\right], \; при \;\; 0\leq x\leq \frac{1}{2}, \\ \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(1+\frac{(1-x)^2}{4}\right)\right], \; при \;\; \frac{1}{2}\leq x\leq 1, \end{cases}$$

где $\lambda>0$.

Обозначим через C_L класс функций из $C^2(\overline{D})$,удовлетворяющие краевым условиям (2),(3). Через $W_2^{'}(D)$ будем обозначить пространства Соболева, полученные замыканием класса функций C_L по норме

$$\|u\|_1^2 = \int_D (u_x^2 + u_y^2 + u^2) dD,$$

по пространствам функцией $W_2^{'}(D)$ и $L_2(D)$ построим негативное пространства $W_2^{-1}(D)$.

$$\| f \|_{-1} = \sup_{u \in W_2^{'}} \left(\frac{(f,u)_0}{\|u\|_1} \right)$$

Лемма 1. Пусть $f_1(x,y) \geq \delta_1 > 0$ в области D^+, и пусть кроме того

$$2 f_2(x,y) - \lambda y - 1 \geq \delta_2 > 0, (x,y) \in D^-.$$

Тогда имеют место неравенство

$$\left| (Lu, e^{\lambda y} u_y)_0 \right| \geq m \|u\|_1^2, \ \forall u \in C_L, \ m > 0. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее тождество:

$$(u_{xx} + f_1(x,y)u_y, e^{\lambda y}u_y)_{0,D^+} + (yu_{yy} + u_{xx} + f_2(x,y)u_y, e^{\lambda y}u_y)_{0,D^-} =$$

$$= \int_{D^-} e^{\lambda y} (\frac{\lambda}{2} u_x^2 + f_1(x,y)u_y^2) dD^+ + \int_{D^+} e^{\lambda y} [\frac{\lambda}{2} u_x^2 + \frac{1}{2}(2 f_2(x,y) - \lambda y - 1) u_y^2] dD^- - \tag{5}$$

$$- \frac{e^{\lambda}}{2} \int_0^1 u_x^2(x,y) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^-} e^{\lambda y} [(u_x^2 - yu_y^2) n_2 - 2u_x u_y n_1] dS,$$

которое получено интегрированием по частям, где $\Gamma^- = AC \cup BC$. В тождестве (5) учтено условие (2). Легко видеть, что так как выполнены условие леммы, мы получим неравенство

$$I_1^+ + I_2^- \geq 0.$$

Далее криволинейный интеграл в (5) вычислим на характеристике AC

$$\frac{1}{2} \int_{AC} e^{-\frac{\lambda x^2}{4}} \left\{ \left[u_x^2 - \frac{x^2}{4} u_y^2 \right] n_2 - 2u_x u_y n_2 \right\} dS = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-\frac{\lambda x^2}{4}} \left[u_x^2 + \frac{x^2}{4} u_y^2 - x u_x u_y \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-\frac{\lambda x^2}{4}} \left[u_x - \frac{x^2}{2} u_y \right]^2 dx.$$

Аналогично на характеристике BC имеем

$$\frac{1}{2} \int_{BC} e^{-\frac{\lambda (1-x)^2}{4}} \left\{ \left[u_x^2 + \frac{(1-x)^2}{4} u_y^2 \right] n_2 - 2u_x u_y n_1 \right\} dS =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 e^{-\frac{\lambda (1-x)^2}{4}} \left[u_x + \frac{(1-x)^2}{2} u_y \right]^2 dx. \tag{6}$$

Первый граничный интеграл в (5) представим в виде

$$-\frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1 u_x^2(x,1)dx = -\frac{e^{\lambda}}{2}\left[\int_0^{1/2} u_x^2(x,1)dx + \int_{1/2}^1 u_x^2(x,1)dx\right]. \quad (8)$$

Используя условие (3) в интегралах правой части (8) соответственно получим

$$-\frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^{1/2} u_x^2(x,1)dx = \frac{e^{\lambda}}{2}\left\{\int_0^{1/2}\beta(x)\beta_{xx}u^2(x,-\frac{x^2}{4})dx - \right.$$
$$\left. -\int_0^{1/2}\beta^2[u_x(x,-\frac{x^2}{4}) - \frac{x}{2}u_y(x,-\frac{x^2}{4})]^2 dx - \beta(\frac{1}{2})\beta_x(\frac{1}{2})u^2(\frac{1}{2},-\frac{1}{16})\right\} \quad (9)$$

$$-\frac{e^{\lambda}}{2}\int_{1/2}^1 u_x^2(x,1)dx = \frac{e^{\lambda}}{2}\left\{\int_{1/2}^1 \beta(x)\beta_{xx}u^2(x,-\frac{(1-x)^2}{4})dx - \right.$$
$$-\int_{1/2}^1 \beta^2[u_x(x,-\frac{(1-x)^2}{4}) + \frac{1-x}{2}u_y(x,-\frac{(1-x)^2}{4})]^2 dx + \quad (10)$$
$$\left. +\beta(\frac{1}{2})\beta_x(\frac{1}{2})u^2(\frac{1}{2},-\frac{1}{16})\right\}.$$

Учитывая (6)-(10) имеем

$$\Gamma_1^+ + \Gamma_2^- \geq 0$$

и тем самым лемма доказана.

Как следует доказанного неравенства (4) следует единственность регулярных решений задачи (1)-(3).

Рассмотрим формально сопряженное уравнение

$$L^*v = \begin{cases} v_{xx} - (f,v)_y = g_1(x,y), \ y \geq 0, \\ (yu)_{yy} + v_{xx} - (f_2 v)_y = g_2(x,y), \ y < 0, \end{cases} \quad (11)$$

и сопряженные краевые условия

$$v(x,y)_{\partial D} = 0 \quad (12)$$

$$-v_y(x,1)\beta(x) = [yv_y n_2 + v_x n_1]_{AC\cup BC} \quad (13)$$

Обозначим через C_L^* классы функций из $C_2(\overline{D})$, удовлетворяющие краевым условиям (12)-(13).

Определение. Слабым решением задачи (11)-(13) будем называть функцию $v \in L_2(D)$ и такую, что для всех функций $u \in C_L$ выполняется тождество

$$(v, Lu)_0 = (g,u), \ \forall u \in C_L.$$

Аналогично вводится определение слабого решения прямой задачи, т.е. функция $u \in L_2(D)$ слабое решение задачи (1)-(3), если выполнено тождество

$$(u, L^*v)_0 = (f,v)_0, \ \forall v \in C^*_L. \quad (14)$$

Volume: 02 Issue: 05 | May2021, ISSN: 2660-5317

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1, то для любой функции $g(x,y)\in L_2(D)$ существует слабое решении задачи (11)-(13).

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$(v,Lu)_0=(g,u)_0,\ \forall u\in C_L,\ g(x,y)\in L_2(D).$$

При фиксированной функции $g(x,y)$ получим, что $(g,u)_0$ есть непрерывный функционал над пространством $L_2(D)$. Но по неравенству (4)

$$\left|(g,u)_0\right|\le m\|g\|\cdot\|Lu\|.$$

Отсюда $(g,u)_0$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал по Lu над некоторым подпространством пространство $L_2(D)$. Продолжая этот функционал на все пространство $L_2(D)$ по непрерывности и используя теорему Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гилбертовом пространстве, получим, что существует функция $v(x,y)\in L_2(D)$ и такая, что

$$(v,Lu)_0=(g,u)_0,\ \forall u\in C_L.$$

Теорема 2. Если выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $f_i(x,y)\in L_2(D),\ i=1,2$ существует слабое решении задачи (1)-(3) из пространства $W_2\,'(D)$.

Доказательство. Рассмотрим в области D для дифференциального уравнения первого порядка

$$lu=e^{\lambda y}u_y=v(x,y),\ v(x,y)\in C*_L. \qquad (15)$$

Нелокальную задачу

$$\left.\begin{aligned} &u(0,y)=u(1,y)=0,\\ &u(x,1)=\beta(x)u(x,y)/AC\cup BC \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Легко видеть, что существует единственное решение $u\in C_L$ этот задачи, которое дается формулой

$$u(x,y)=\int_\Gamma e^{-\lambda\tau}v(x,\tau)d\tau+\frac{1}{\beta+1}\int_\Gamma e^{-\lambda\tau}v(x,\tau)d\tau.$$

Пусть $u(x,y)-$ решение задачи (15)-(16). Из (15) получаем

$$\|L*v\|_{W_2^{-1}}\|u\|_{W_2^1}\ge(L*v,u)_0=(v,Lu)_0=(e^{\lambda y}u_y,Lu)\ge\|u\|_1^2.$$

Откуда

$$\|L*v\|_{W_2^{-1}}\ge m\|v\|_0,\ \forall v(x,y)\in C*_L. \qquad (17)$$

Так как из (15) следует, что $\|u\|_{W_2^{-1}}\ge m\|v\|_0$. Из оприорной оценки (17), как известно [2], вытекает, что выполняется (14). Теорема доказана.

Использованная литература:

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, - 448 стр.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкеля. Докл. АН СССР, 1956, -Т. 109, №6.
4. Врагов В.Н. Краевые Задачи неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: ИГУ, 1983, -84 стр.
5. Муминов Ф.М., Миратоев З.М., Утабов У. Об одной краевой задаче для уровнения составного типа третьего порядка. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES, 2(4), pp.17-22. 2021.
6. Муминов Ф.М., Миратоев З.М. О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. «Scientificprogress» ScientificJournal. April 2021. ISSN: 2181-1601 Volume: 1, ISSUE: 6.
7. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об Одной Нелокальной Краевой Задаче Для Уравнения Смешанного Типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 ISSN: 2660-5309.
8. Muminov F.M., Bekmurodov U.N. Mixed boundary value problems for composite type equation. International Engineering Journal for Research and Development Vol.5, Issue 6, September 10, 2020.
9. Трикоми Ф.О. Линейных уравнениях смещанного типа. М. Гостехиздат, 1947.
10. Франкель Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
11. M.M.Usarovich, A.Y.Shahabidinovna, M.Z. Mirvaliyevich,Tools for formalized description and transformation of algorithms aimed at synthesizing devices of control computing systems. - International Engineering Journal For Research &…, 2020.

