

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES

Volume: 03 Issue: 04 | Apr 2022 ISSN: 2660-5317

Одномерная Обратная Задача Переноса Вещества В Пористой Среде

Джиянов Турсунпулат Ортикович

Самаркандский государственный университет, кафедра математического Моделирования,
факультет цифровых технологий PhD

Рузиева Махлиё Ахмаджановна

Самаркандский государственный университет, кафедра математического моделирования,
факультет цифровых технологий ассистент

Тураев Мирзохид Хошимович

Самаркандский государственный университет, кафедра математического моделирования,
факультет цифровых технологий магистрант

Received 24th Feb 2022, Accepted 12th Mar 2022, Online 5th Apr 2022

Аннотация: В данной работе рассматривается обратная задача по идентификации источника параболического дифференциального уравнения описывающего перенос вещества в пористой среде с учетом диффузии.

Ключевые слова: метод идентификации, обратная задача, перенос вещества, концентрация вещества, пористая среда, численное решение.

Обратные задачи являются актуальными для многих областей естествознания и наук, в частности, для механики жидкости и газа. Прямая задача математической физики связывается нами с классическими краевыми задачами математической физики и характеризуется необходимостью найти решения, которое удовлетворяет заданному уравнению с частными производными и некоторым начальным и граничным условиям [1, 2]. В обратных задачах определяющее уравнение или начальные, или граничные условия не заданы полностью, но зато есть некоторая дополнительная информация [1, 2]. Классификация обратных задач математической физики приведена в [3].

Здесь вводятся четыре вида обратных задач – коэффициентные, граничные, ретроспективные (эволюционные) и геометрические. Коэффициентные обратные задачи заключаются в нахождении функций и параметров, входящих в коэффициенты уравнений; граничные – функций и параметров, входящих в граничные условия; ретроспективные (эволюционные), т.е. обращенные назад по времени – в нахождении начальных условий; геометрические – в реконструированные геометрических характеристик области или каких-либо характерных точек, линий, поверхностей внутри ее (например, в определении координат границы фазового перехода или линии контакта сред с различными физическими свойствами). Обратные задачи в общем случае являются

некорректными [4,5,6]. Теоретические и практические проблемы решения обратных задач математической физики исследованы в [4-12].

Рассмотрим постановку этой обратной задачи на примере первой краевой задачи для уравнения переноса вещества в пористой среде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \lambda c, \quad (1)$$

$$c(0, x) = c_0, \quad (2)$$

$$c(t, 0) = c_0 = \text{const}, \quad c(t, l) = 0. \quad (3)$$

Обратная задача ставится так. При $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 > 0$ задана функция $z(t) = c(x_0, t)$, где x_0 – некоторая фиксированная точка отрезка $[0, l]$, а $c(x, t)$ – решение задачи (1)–(2).

Пусть для уравнений (1) обычным образом заданы начальные и граничные условия.

Сначала рассмотрим задачу определения D методом идентификации. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – характерные точки пласта, в которых производится измерение понижения пластового давления, которые являются известными функциями времени $z_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq t \leq T$.

$$J(D) = \sum_{k=1}^n \int_0^T [C(t, x_k) - z_k(t)]^2 dt. \quad (4)$$

Условие стационарности функционала (4) будет иметь вид

$$\frac{d(J)}{d(D)} = 2 \sum_{k=1}^n \int_0^T [c(t, x_k) - z_k(t)] w(t, x_k) dt = 0. \quad (5)$$

Здесь $w = \frac{\partial C}{\partial D}$, Запишем функцию $c(t, x)$ вокруг D^S во вторую строку точности:

$$c^{S+1}(t, x) \approx c^S(t, x) + (D^{S+1} - D^S) w^S(t, x). \quad (6)$$

Подставляя уравнение (6) в уравнение (5), получаем:

$$\sum_{k=1}^n \int_0^T [c^S(t, x_k) + (D^{S+1} - D^S) w^S(t, x_k) - z_k(t)] w^S(t, x_k) dt = 0.$$

Если мы знаем из этого соотношения $c^S(t, x_k)$ и $w^S(t, x_k)$, то приближение можно определить следующим образом.

$$D^{S+1} = \frac{\sum_{k=1}^4 \int_0^T \left[D^S w(t, x_k) - c(t, x_k) + z_k(t) \right] w(t, x_k) dt}{\sum_{k=1}^4 \int_0^T w(t, x_k) dt}. \quad (7)$$

Продифференцируем уравнение (1) на D и получим следующий результат:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda w + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Дифференцируем условия (2), (3) на D , получаем следующий результат:

$$w(0, x) = 0, \quad (9)$$

$$w(t, 0) = 0,$$

$$w(t, l) = 0. \quad (10)$$

Здесь $w = \frac{\partial c}{\partial D}$ функция чувствительности.

Численный алгоритм нахождения коэффициента D можно увидеть в следующем виде:

- 1) С начало дадим D^0 начальное приближение ($S = 0$):
- 2) Решаем задачи (1) и (2) от $(t = 0)$ до $t \subset T$ и определяем функцию $c(t, x)$, затем считаем (4) функциональное значение, решаем задачи (8) и (10) и определяем $w(t, x)$ функцию от $(t = 0)$ до $t \subset T$:
- 3) Определим D^{S+1} по формуле (7):
- 4) Продолжаем шаги (2) и (3), пока не будут выполнены следующие условия:

$$\frac{|J^{S+1} - J^S|}{J^S} \leq \varepsilon_1, \frac{|D^{S+1} - D^S|}{D^S} \leq \varepsilon_2.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ достаточно допустимая ошибка(1)-(3), (8)-(10) разностные задачи $D = D^2$ решаем конечным разностным методом $D = \{0 \leq x < l, 0 \leq t \leq T\}$,

$$\Omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j), x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{l}{N}, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = \frac{T}{M} \right\},$$

$$\frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} = D^S \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_i^{j+1} + c_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \lambda c_i^{j+1}, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, M-1},$$

$$c_i^0 = 0, i = \overline{0, N}, c_0^{j+1} = c_0, c_N^{j+1} = 0, j = \overline{0, M-1}. \quad (11)$$

(4) после данной функциональной аппроксимации принимает следующий вид:

$$J = \sum_{k=1}^4 \tau (c_k^{j+1} - z_k^{j+1})^2, z_k^j = z_k(t_j).$$

(8), (10) аппроксимируем задачи

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\tau} = D^S \frac{w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \lambda w_i^{j+1} + \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_i^{j+1} + c_{i-1}^{j+1}}{h^2},$$

$$i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, M-1}, w_i^0 = 0, i = \overline{0, N}, w_0^{j+1} = 0, w_N^{j+1} = 0,$$

$$j = \overline{0, N-1}. \quad (12)$$

После аппроксимации (7) приближение имеет следующий вид :

$$D^{S+1} = \frac{\sum_{k=1}^4 \sum_{j=0}^{M-1} [D^S w_k^{j+1} - c_k^{j+1} + z_k^{j+1}] w_k^{j+1}}{\sum_{k=1}^4 \sum_{j=0}^{M-1} [w_k^{j+1}]^2}.$$

(11), (12) приводим к следующему виду разностные уравнения:

$$Ac_{i-1}^{j+1} - Cc_i^{j+1} + Bc_{i+1}^{j+1} = -F1_i^j, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, M-1}, \quad (13)$$

$$Aw_{i-1}^{j+1} - Cw_i^{j+1} + Bw_{i+1}^{j+1} = -F2_i^j, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, M-1}. \quad (14)$$

$$\text{Здесь } A = B = \frac{D^S \tau}{h^2}, C = 1 - \lambda \tau + 2A, F1_i^j = c_i^j, F2_i^j = w_i^j + \frac{\tau}{h^2} (c_{i+1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i-1}^{j+1}).$$

(13) и (14) чтобы решить задачу применяем метод «Прогонки».

$$c_i^{j+1} = \alpha_{i+1}^{(1)} c_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{(1)}, i = N-1, N-2, \dots, 1, 0, c_N^{j+1} = 0, \quad (15)$$

$$\alpha_{i+1}^{(1)} = \frac{B}{C - A\alpha_i^{(1)}}, \beta_{i+1}^{(1)} = \frac{A\beta_i^{(1)} + F1_i^j}{C - A\alpha_i^{(1)}},$$

$$i = \overline{1, N-1}, c_0^{j+1} = \alpha_1^{(1)} c_1^{j+1} + \beta_1^{(1)} = c_0, \alpha_1^{(1)} = 0, \beta_1^{(1)} = c_0,$$

$$w_i^{j+1} = \alpha_{i+1}^{(2)} w_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{(2)}, i = N-1, \dots, 1, 0, w_N^{j+1} = 0, \quad (16)$$

$$\alpha_{i+1}^{(2)} = \frac{B}{C - A\alpha_i^{(2)}}, \beta_{i+1}^{(2)} = \frac{A\beta_i^{(2)} + F2_i^j}{C - A\alpha_i^{(2)}}, \quad (17)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \alpha_1^{(2)} = 0, \beta_2^{(2)} = 0.$$

Сетка разбивала отрезок $[0; L]$ на оси x на 100 интервалов, временной отрезок $[0; T]$ – на 3600. «Данные измерений» подготовлены в 5×10 точках «координата – время» на основе сеточного решения первого уравнения (1) с заданными параметрами: $D = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $L = 1 \text{ м}$, $t = 3600 \text{ с}$, $\lambda = 0.0001$.

Для анализированных выше случаев получены следующее минимальное значение

$$J(D) = 0,000000001813351461609574 \text{ для } D = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Результаты расчетов по идентификации параметров D , когда в качестве нулевого приближения заданы $D = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, представлены на (рис.2.3) Анализ результатов показывает, что в режиме понижения диффузия параметр D подходит к точке равновесия с одной стороны и восстанавливается практически (рис.2.3(а)). Когда исходная информация задается в 2×10 точках «координата – время» параметр подходит к точке равновесия за четыре итерации (рис.2.3 (а)).

(Рис. 2.3 (б))показано изменение профиля концентрации во времени при $x=0.2 \text{ м}$.

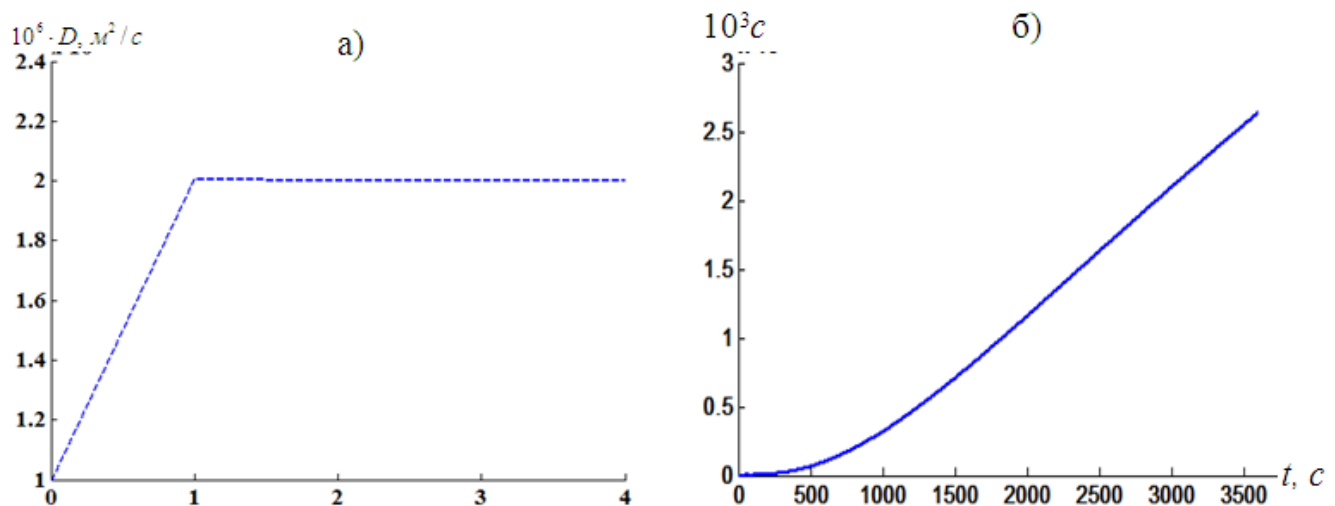


Рис 2.3. Профили c при различных x и $t=3600 \text{ с}$, $\lambda = 10^{-4}$ (а) $D = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $x = 0,2 \text{ м}$ (б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: ЛКИ, 2007. – 480 с.
3. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М., Наука, 1980. – 288 с.
5. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. – 88 с.

6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. -288 с.
7. Алифанов О.М. Идентификации процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
8. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Мир, 1968. 184 с.
9. Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. – 162 с.
10. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир. – 312 с.
11. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка, 1982. 359 с.
12. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.